

Chapitre 3

Synthèse des filtres non récursifs

Table des matières

1	Introduction	1
2	Spécifications	1
3	Propriétés des filtres RIF à phase linéaire	2
3.1	Réponses impulsionnelle et fréquentielle	3
3.1.1	Symétrie axiale	3
3.1.2	Symétrie ponctuelle	3
3.1.3	Remarque	4
3.1.4	Exemple	4
4	Synthèse par fenêtrage	5
4.1	Principe du fenêtrage	5
4.2	Effet de la troncation	6
5	Réponses fréquentielles et impulsionnelles idéales	8
5.1	Filtre passe-bas	8
5.2	Filtre passe-haut	11
5.3	Filtre passe-bande et réjecteur de bande	11
6	Caractéristiques de quelques fenêtres	13
6.1	Fenêtres analytiques	13
	Fenêtre rectangulaire	13
	Fenêtre triangulaire (ou de Bartlett)	13
	Fenêtre en cosinus (ou de Hann)	15
	Fenêtre de Hamming	15
	Fenêtre de Blackman	15
6.2	Fenêtre de Kaiser-Bessel	15
6.2.1	Calcul de la fonction de Bessel	16
6.2.2	Calcul des paramètres des fenêtres de Kaiser	16

7	Utilisation des fenêtres	19
7.1	Résumé des propriétés	19
7.2	Démarche pour calculer un filtre	20
8	Exemples de synthèse	22
8.1	Réalisation d'un filtre passe-bas	22
8.1.1	Préliminaires	22
8.1.2	Fenêtrage de Hamming	22
8.1.3	Fenêtrage de Kaiser	24
8.2	Calcul d'un filtre passe-bande	24
9	Exercices	28

Chapitre 3

Synthèse des filtres non récursifs

1 Introduction

Les filtres non récursifs que l'on appelle également filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) se distinguent des filtres récursifs étudiés dans le chapitre précédent par les points suivants :

- ils sont toujours stables ;
- ils peuvent être conçus pour avoir une phase linéaire exacte ;
- ils nécessitent généralement plus de matériel et de temps de calcul.

Un filtre non récursif d'ordre N comporte $N + 1$ coefficients et peut être décrit de manière équivalente par :

- sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = \{h[0], h[1], h[2], \dots, h[N]\} = \sum_{k=0}^N h[k] \delta[n - k] \quad (1)$$

- son équation aux différences

$$y[n] = \sum_{k=0}^N h[k] x[n - k] \quad (2)$$

- sa fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n} \quad (3)$$

- sa réponse fréquentielle

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \sum_{n=0}^N h[n] e^{-jn\Omega} \quad (4)$$

2 Spécifications

Les spécifications d'un filtre se donnent sous la forme d'un gabarit en valeurs réelles ou relatives (dB). Un exemple de gabarit pour un filtre passe-bas est illustré dans la figure 1.

On y trouve :

- la bande passante $[0, \Omega_p]$, celles de transition (Ω_p, Ω_a) et d'arrêt $[\Omega_a, \pi]$;

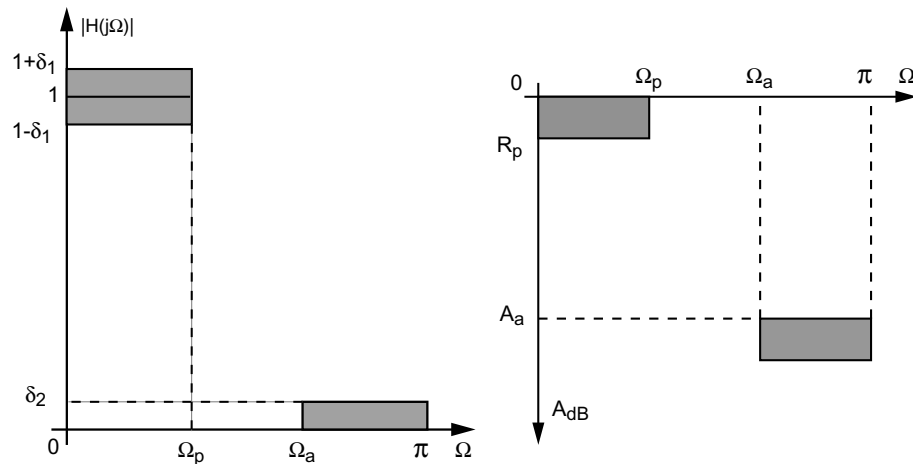


FIG. 1: Gabarit d'un filtre

- l'ondulation acceptée dans la bande passante, exprimée par δ_1 ou R_p [dB] ;
- l'atténuation souhaitée dans la bande d'arrêt, exprimée par δ_2 ou A_a [dB].

Les relations existant entre les valeurs réelles ou relatives sont alors définies comme suit :

$$R_p = +20 \log \frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1} > 0 \quad (5)$$

$$A_a = -20 \log \frac{\delta_2}{1 + \delta_1} > 0 \quad (6)$$

Comme les valeurs de δ_1 et δ_2 sont généralement beaucoup plus petites que 1, on peut utiliser les approximations suivantes :

$$R_p \simeq -20 \log (1 - 2\delta_1) > 0 \quad (\simeq 0) \quad (7)$$

$$A_a \simeq -20 \log (\delta_2) > 0 \quad (\gg 1) \quad (8)$$

ou leurs relations inverses :

$$\delta_1 \simeq \frac{1}{2} \left(1 - 10^{-R_p/20} \right) \quad (9)$$

$$\delta_2 \simeq 10^{-A_a/20} \quad (10)$$

3 Propriétés des filtres RIF à phase linéaire

De manière générale, un filtre RIF ne possède aucune propriété particulière concernant le module ou la phase de la réponse fréquentielle. Cependant, c'est seulement avec ce type de filtres que l'on peut obtenir une phase linéaire exacte qui est une des propriétés du filtre idéal. C'est donc essentiellement pour cette propriété que l'on utilise les filtres à réponse impulsionnelle finie.

3.1 Réponses impulsionnelle et fréquentielle

Dans le cas où on désire avoir une phase linéaire, la réponse impulsionnelle doit posséder une symétrie axiale ou une symétrie ponctuelle. La justification en est donnée ci-dessous.

3.1.1 Symétrie axiale

Considérons un filtre RIF d'ordre $N = 6$ représenté par une séquence $h[n]$ à symétrie axiale par rapport à $N_s = 3$ (figure 2a). Cette séquence provient d'une réponse impulsionnelle paire $h_p[n]$ non causale dont la réponse fréquentielle est réelle.

Le décalage temporel (ici, un retard) nécessaire pour rendre le filtre causal entraîne le déphasage linéaire souhaité. On a donc

$$H(j\Omega) = \exp(-jN_s\Omega) H_p(j\Omega) \Rightarrow \begin{cases} |H| = |H_p| \\ \angle H = \{0, \pm\pi\} - N_s\Omega \end{cases} \quad (11)$$

Le module de $H(j\Omega)$ est égal à celui du filtre non causal $H_p(j\Omega)$ et la phase varie linéairement avec la pulsation. Le cas échéant, on devra, ajouter $\pm\pi$ à cette phase linéaire pour tenir compte de la valeur négative éventuelle de $H_p(j\Omega)$.

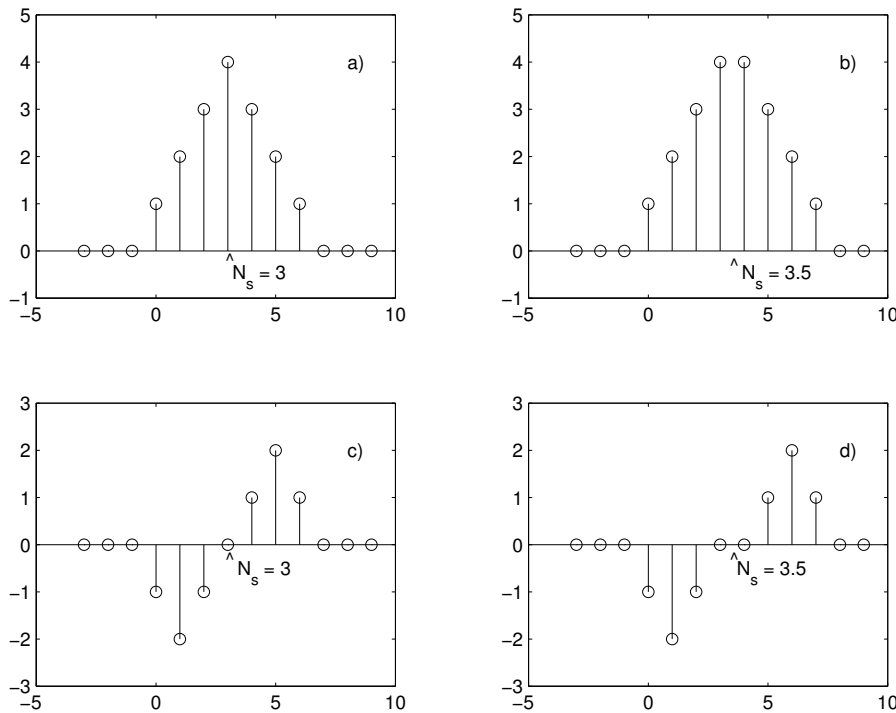


FIG. 2: Réponses impulsionnelles à symétrie axiale ou ponctuelle

3.1.2 Symétrie ponctuelle

Considérons un filtre RIF d'ordre $N = 6$ représenté par une séquence $h[n]$ à symétrie ponctuelle par rapport à $N_s = 3$ (figure 2b). Cette séquence provient d'une réponse impul-

sionnelle impaire $h_i[n]$ non causale dont la réponse fréquentielle est purement imaginaire. Le décalage temporel nécessaire pour rendre le filtre causal entraîne le déphasage linéaire souhaité. On a donc

$$H(j\Omega) = \exp(-jN_s\Omega) H_i(j\Omega) \Rightarrow \begin{cases} |H| = |H_i| \\ \angle H = \pm\pi/2 - N_s\Omega \end{cases} \quad (12)$$

Le module de $H(j\Omega)$ est égal à celui du filtre non causal $H_i(j\Omega)$ et sa phase varie linéairement avec la pulsation à partir de $\pm\pi/2$ suivant le signe de la valeur imaginaire.

3.1.3 Remarque

On peut bien sûr considérer des filtres d'ordre N impair (figures 2c et 2d). Dans ce cas, l'axe ou le point de symétrie se situe entre 2 valeurs de la réponse impulsionnelle $h[n]$ et le déphasage linéaire s'écrira $-(N_s + \frac{1}{2})\Omega$. Dans le cadre de ce cours, on n'analysera que des filtres d'ordre pair.

3.1.4 Exemple

Considérons un filtre dont la réponse impulsionnelle (figure 3a) est décrite par

$$h[n] = \{0, +1, +2, +3, +4, +5, +4, +3, +2, +1, 0\}$$

C'est un filtre d'ordre $N = 10$ avec une à symétrie axiale située en $N_s = 5$ faisant intervenir une séquence paire valant pour $n \geq 0$: $h_p[n] = \{+5, +4, +3, +2, +1\}$

Étant donné la symétrie et le décalage, la réponse fréquentielle se calcule aisément :

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= \exp(-jN_s\Omega) H_p(j\Omega) \\ &= \exp(-jN_s\Omega) \sum_{n=-N_s}^{+N_s} h_p[n] \exp(-jn\Omega) \\ &= \exp(-jN_s\Omega) \left(h_p[0] + 2 \sum_{n=1}^{+N_s} h_p[n] \cos(n\Omega) \right) \end{aligned}$$

Ce qui, compte tenu des valeurs numériques, s'écrit :

$$H(j\Omega) = \exp(-j5\Omega) \left(5 + 2 \sum_{n=1}^{+5} h_p[n] \cos(n\Omega) \right)$$

La partie entre parenthèses est réelle et elle correspond à l'amplitude de la réponse fréquentielle (figure 3c) alors que le phaseur $\exp(-j4\Omega)$ correspond à la phase linéaire souhaitée (figure 3d).

De la réponse impulsionnelle, on peut en déduire la fonction de transfert du filtre RIF :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^N h[k] z^{-k} \\ &= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 4z^{-5} + 3z^{-6} + 2z^{-7} + 1z^{-8} \\ &= z^{-10} \left(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + 4z^5 + 3z^6 + 2z^7 + 1z^8 \right) \end{aligned}$$

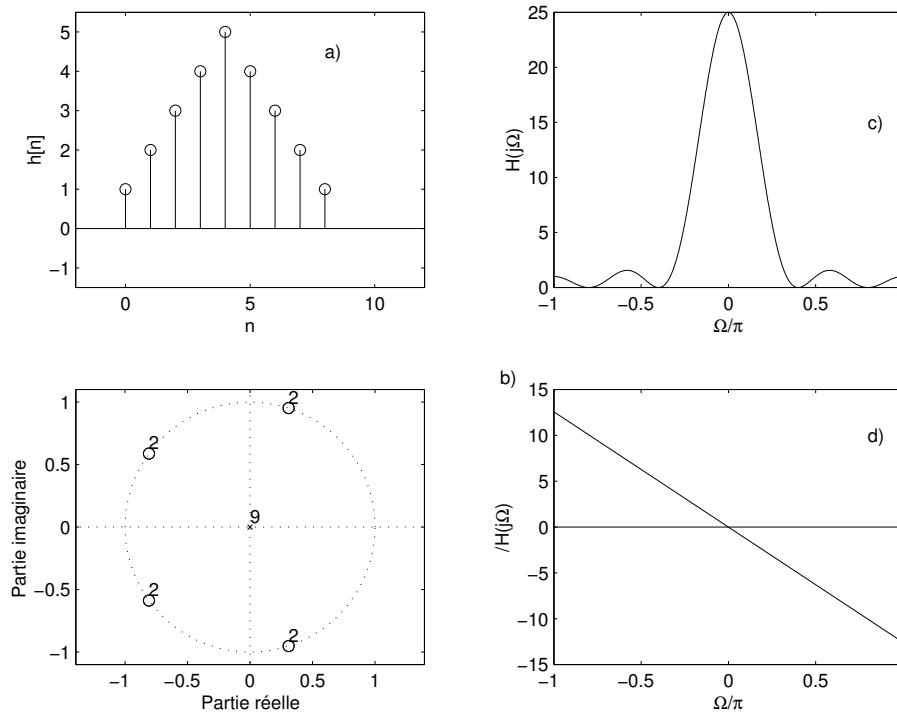


FIG. 3: Réponse impulsionnelle, pôles et zéros, amplitude et phase

On en conclut que ce filtre RIF d'ordre 10 possède 10 pôles situés en $z = 0$ et 10 zéros dont les positions dans le plan complexe sont présentées dans la figure 3b.

4 Synthèse par fenêtrage

4.1 Principe du fenêtrage

Le point de départ de la synthèse des filtres RIF consiste en l'idée de construire la réponse impulsionnelle des filtres idéaux. On verra plus loin que celles-ci sont infiniment longues et non causales ; c'est la raison pour laquelle les filtres idéaux ne sont pas réalisables. On doit donc manifestement se contenter d'une approximation des réponses idéales en les tronquant avant de les rendre causales.

Pour le voir plus précisément comment cela se passe, considérons la réponse fréquentielle $H_d(j\omega)$ d'un filtre analogique passe-bas idéal (figure 4a). Sa réponse impulsionnelle $h_d(t)$ se calcule par transformation de Fourier inverse. On obtient ainsi une réponse temporelle en forme de sinus cardinal et de longueur infinie (figure 4b).

De manière à ce que ce filtre soit réalisable, il faut tronquer cette réponse en respectant sa symétrie paire (figure 4d). On obtient alors un filtre à réponse impulsionnelle de durée finie, mais non causale puisque $h(t)$ n'est pas nulle pour $t < 0$. Un décalage de cette réponse à symétrie axiale suffit à rendre le filtre causal (figure 4f), donc à phase linéaire (figure 4e). Bien entendu, le module de sa réponse fréquentielle ne sera plus qu'une approximation de l'idéal (figure 4c).

D'un point de vue mathématique, le fait de tronquer la réponse impulsionnelle $h_d(t)$ revient à multiplier celle-ci par une fenêtre rectangulaire $w_r(t)$ et la réponse impulsionnelle s'écrit alors :

$$h(t) = h_d(t) \cdot w_r(t) \quad (13)$$

Pour un filtre numérique, on aura de manière équivalente :

$$h[n] = h_d[n] \cdot w_r[n] \quad (14)$$

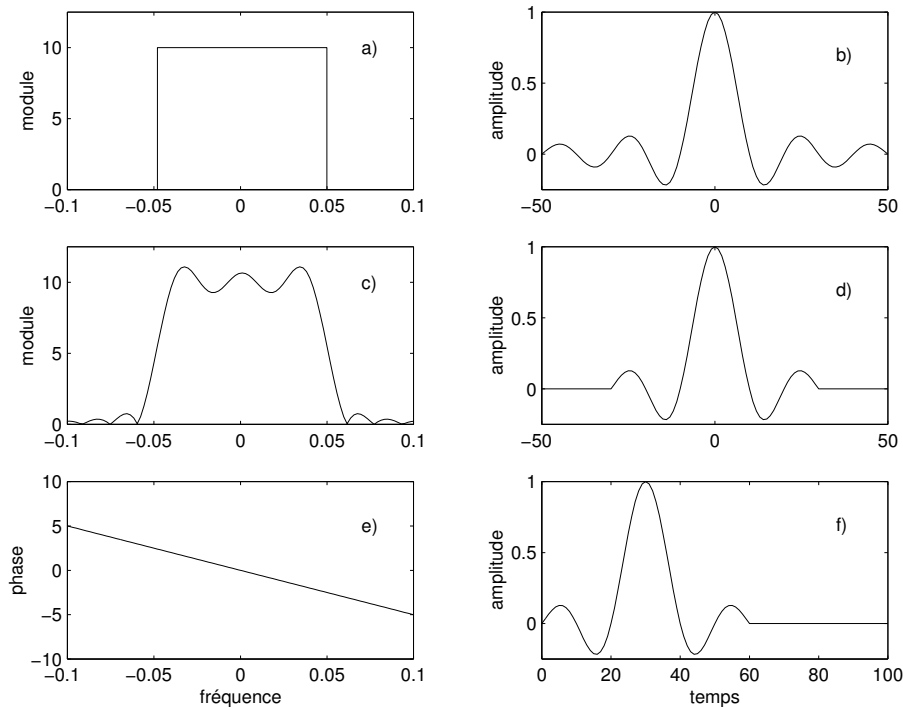


FIG. 4: Passage du filtre idéal au filtre réalisable

4.2 Effet de la troncation

L'opération de troncation qui, dans une première approche peut sembler anodine, modifie sensiblement la réponse fréquentielle et entraîne des ondulations dans les bandes passantes et d'arrêt. Ceci provient de la convolution entre la réponse fréquentielle du filtre idéal et le spectre en sinus cardinal de la fenêtre rectangulaire :

$$H(j\Omega) = H_d(j\Omega) \otimes W(j\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_d(j\theta) W(j\Omega - j\theta) d\theta \quad (15)$$

La figure 5 montre à l'évidence que l'ondulation caractérisant la réponse obtenue $H(j\Omega)$ provient du spectre $W(j\Omega)$ de la fenêtre choisie, ici rectangulaire.

Afin d'obtenir le meilleur compromis possible entre une faible ondulation et une bande de transition étroite, on sera donc amené par la suite à choisir une fenêtre $w[n]$ dont le comportement fréquentiel est satisfaisant du point de vue du filtre à réaliser. C'est-à-dire que l'on cherchera un compromis entre l'amplitude des ondulations et la largeur des bandes de transition.

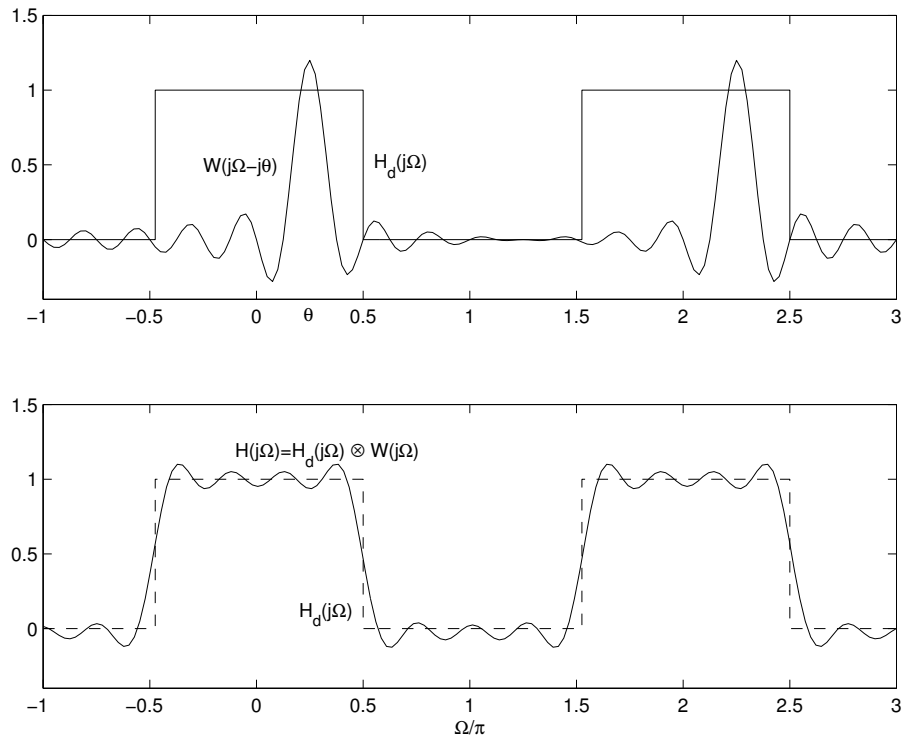


FIG. 5: Convolution circulaire dans le domaine des fréquences

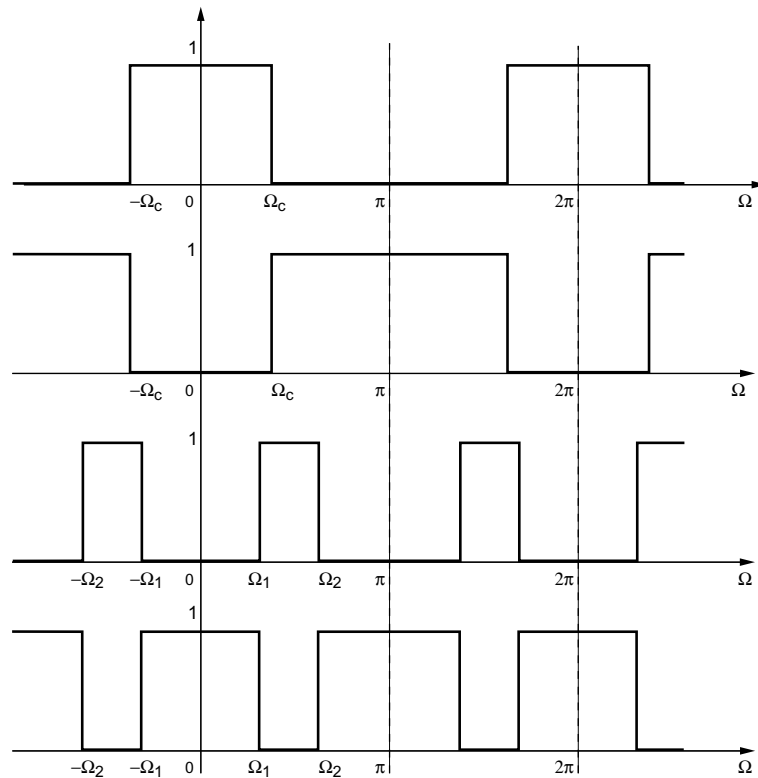


FIG. 6: Réponses fréquentielles idéales des 4 filtres standard passe-bas, passe-haut, passe-bande et réjecteur de bande

5 Réponses fréquentielles et impulsionnelles idéales

Comme la synthèse par fenêtrage utilise les réponses impulsionnelles des filtres idéaux, il est nécessaire de les connaître. Ces réponses impulsionnelles sont calculées en partant des réponses fréquentielles idéales des 4 filtres de base passe-bas, passe-haut, passe-bande et réjecteur de bande (figure 6).

5.1 Filtre passe-bas

Avec Ω_c comme pulsation de coupure, la réponse fréquentielle du filtre s'écrit :

$$H_b(j\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \text{si } |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (16)$$

Sa transformée inverse n'est autre que sa réponse impulsionnelle :

$$h_b[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_b(j\Omega) \exp(+jn\Omega) d\Omega \quad (17)$$

Tenant compte de la réponse fréquentielle idéale du filtre passe-bas, il vient :

$$h_b[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{+\Omega_c} \exp(+jn\Omega) d\Omega$$

$$= \frac{\exp(+jn\Omega_c) - \exp(-jn\Omega_c)}{j2\pi n}$$

Utilisant les relations d'Euler, on obtient finalement :

$$h_b[n] = \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin(n\Omega_c)}{n\Omega_c} \quad -\infty < n < +\infty \quad (18)$$

Cette réponse temporelle est infiniment longue et non causale. Afin de la rendre causale, il faut tout d'abord la tronquer pour avoir une réponse impulsionnelle de longueur N puis la décaler de la moitié de sa longueur.

En choisissant de travailler avec une réponse impulsionnelle d'ordre N centrée en $N_s = N/2$, il vient :

$$h_b[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_c)}{(n-N_s)\Omega_c} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (19)$$

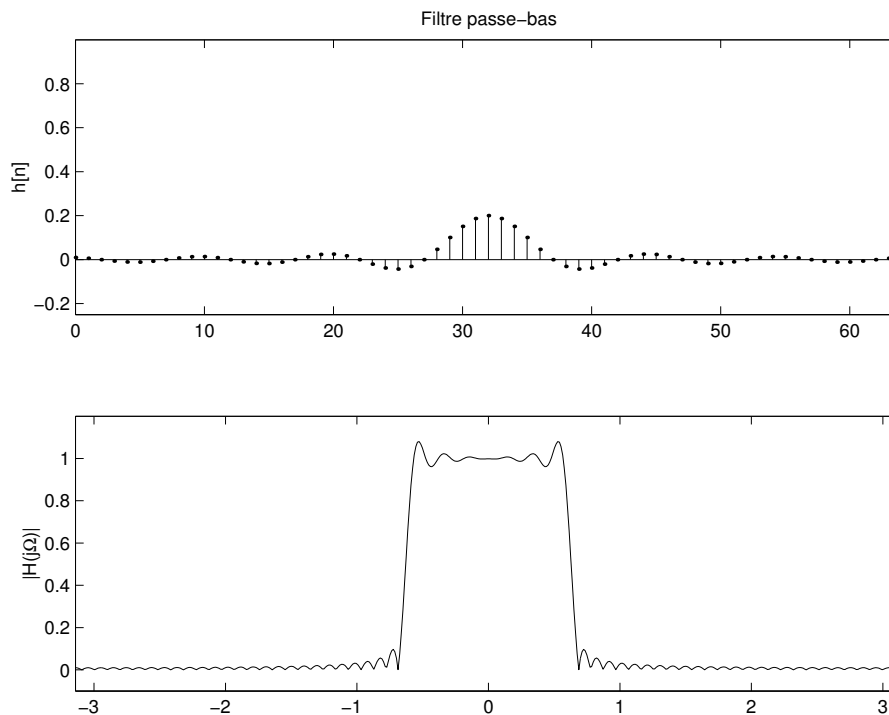


FIG. 7: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-bas

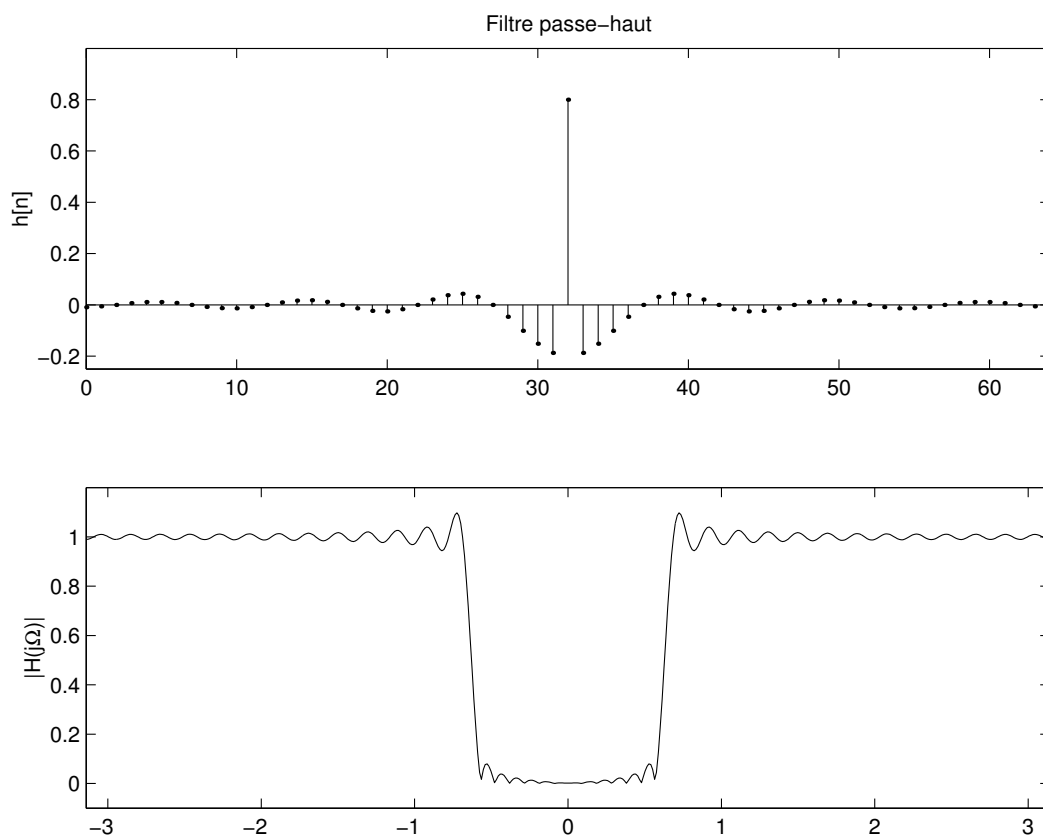


FIG. 8: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-haut

5.2 Filtre passe-haut

Dans ce cas, avec Ω_c comme pulsation de coupure, la réponse fréquentielle du filtre s'écrit :

$$H_h(j\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\Omega| \leq \Omega_c \\ 1 & \text{si } \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad (20)$$

On peut remarquer que les réponses fréquentielles d'un passe-bas et d'un passe-haut sont reliées entre elles par :

$$H_h(j\Omega) = 1 - H_b(j\Omega) \quad (21)$$

Ce qui, dans l'espace temps, correspond à :

$$h_h[n] = \delta[n] - h_b[n] \quad (22)$$

On en déduit donc immédiatement que :

$$h_h[n] = \begin{cases} -\frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_c)}{(n-N_s)\Omega_c} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ 1 - \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (23)$$

5.3 Filtre passe-bande et réjecteur de bande

Le calcul des réponses impulsionnelles des filtres passe-bande et réjecteur de bande est laissé comme exercice.

Ces filtres possèdent 2 pulsations caractéristiques Ω_1 et Ω_2 limitant les bandes passante et d'arrêt. On montre aisément les deux résultats suivants :

1. Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bande

$$h_\Delta[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_2}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_2)}{(n-N_s)\Omega_2} - \frac{\Omega_1}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_1)}{(n-N_s)\Omega_1} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (24)$$

2. Réponse impulsionnelle d'un filtre réjecteur de bande

$$h_r[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_1}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_1)}{(n-N_s)\Omega_1} - \frac{\Omega_2}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_2)}{(n-N_s)\Omega_2} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ 1 - \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (25)$$

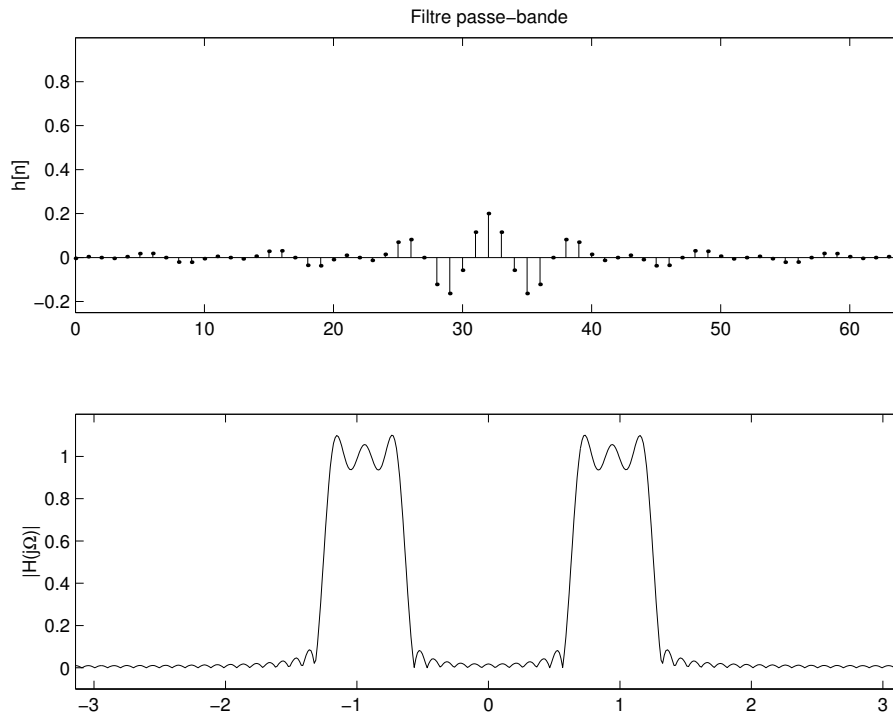


FIG. 9: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-bande

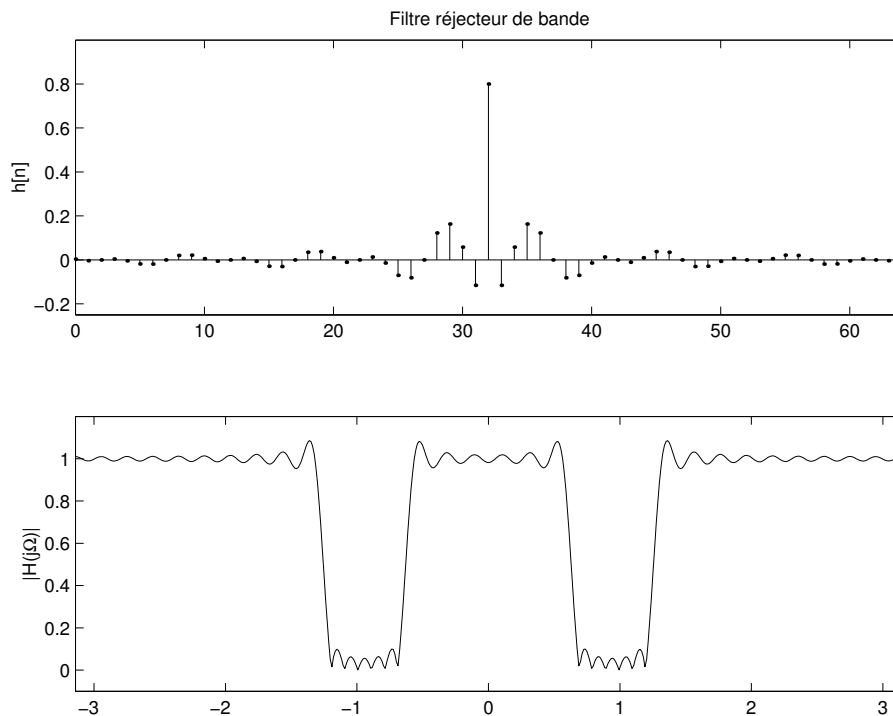


FIG. 10: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre réjecteur de bande

6 Caractéristiques de quelques fenêtres

Du choix de la fenêtre, dépendra la qualité de l'approximation ; il est donc nécessaire de passer en revue les caractéristiques de celles-ci. On rappellera tout d'abord que si on désire conserver la phase linéaire du filtre, il faut que les fenêtres possèdent une symétrie paire ou impaire.

Comme on l'a vu plus haut, la troncation simple de la réponse impulsionnelle de longueur infinie conduit à une réponse fréquentielle avec des ondulations importantes. Celles-ci sont dues au phénomène de Gibbs et ne peuvent être diminuées que si la fenêtre possède des transitions douces, contrairement à la troncation simple.

Les fenêtres susceptibles de satisfaire les besoins de synthèse des filtres et d'analyse spectrale ont fait l'objet d'études extensives [3]. Parmi les nombreuses fenêtres proposées, seules celles qui sont le plus souvent citées sont présentées ci-après.

6.1 Fenêtres analytiques

Pour chacune des fenêtres étudiées, on présentera son équation $w[n]$ et une figure comportant 4 graphes :

1. son graphe temporel $w[n]$
2. son spectre d'amplitudes en unités réelles $W(j\Omega) = TF^{-1}\{w[n]\}$
3. son spectre d'amplitudes en unités relatives (dB) $W_{dB} = 20 \log |W(j\Omega)|$
4. son spectre cumulé défini comme suit [1] :

$$W_{cum}(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\Omega} W(j\theta) d\theta \quad (26)$$

Cette représentation peu commune est importante car grâce à elle, on peut mesurer le niveau d'atténuation possible ainsi que la largeur de la bande de transition pour un filtre RIF. Sa définition découle de la convolution entre une réponse fréquentielle constante et le spectre de la fenêtre $w[n]$.

Fenêtre rectangulaire

$$w_r[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (27)$$

Fenêtre triangulaire (ou de Bartlett)

$$w_t[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N} & \text{si } 0 \leq n \leq N/2 \\ 2 - \frac{2n}{N} & \text{si } N/2 < n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (28)$$

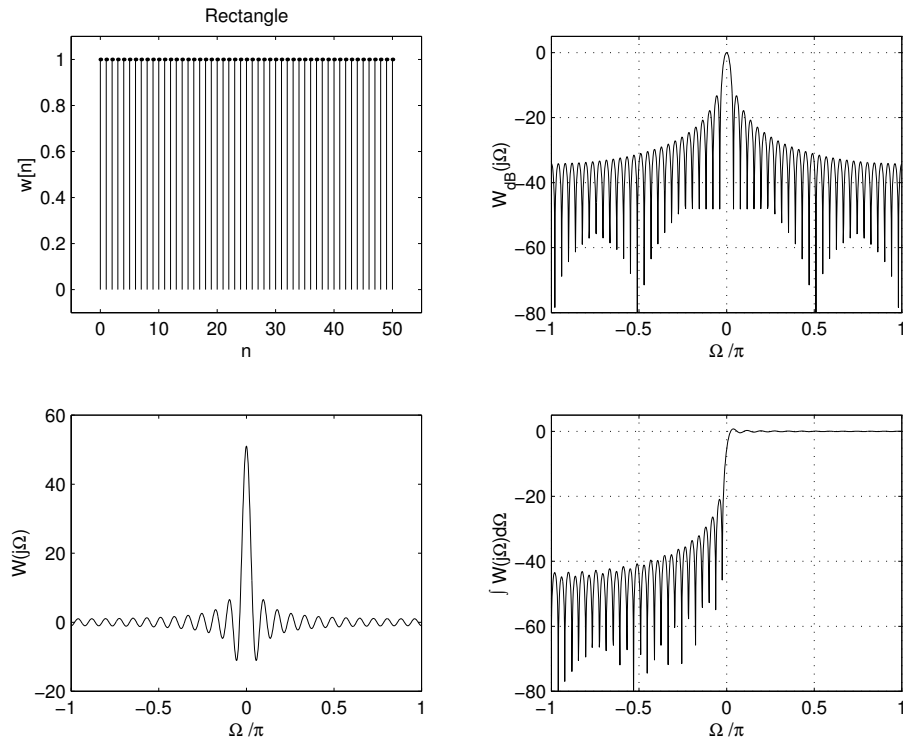


FIG. 11: Fenêtre rectangulaire

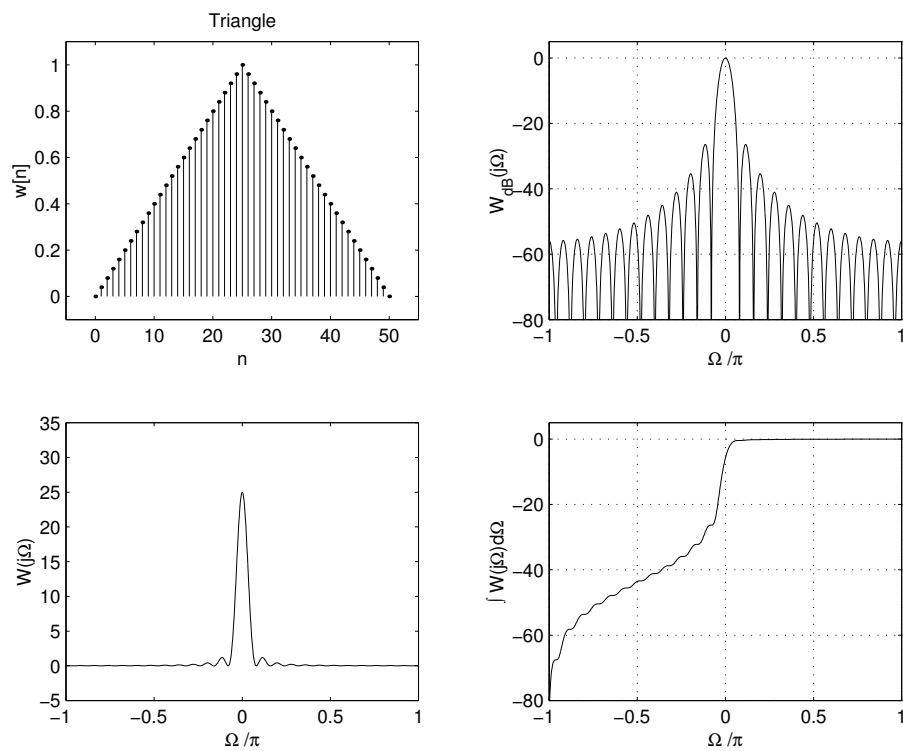


FIG. 12: Fenêtre triangulaire

Fenêtre en cosinus (ou de Hann)

$$w_c[n] = \begin{cases} 0.5 (1 - \cos(2\pi \frac{n}{N})) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (29)$$

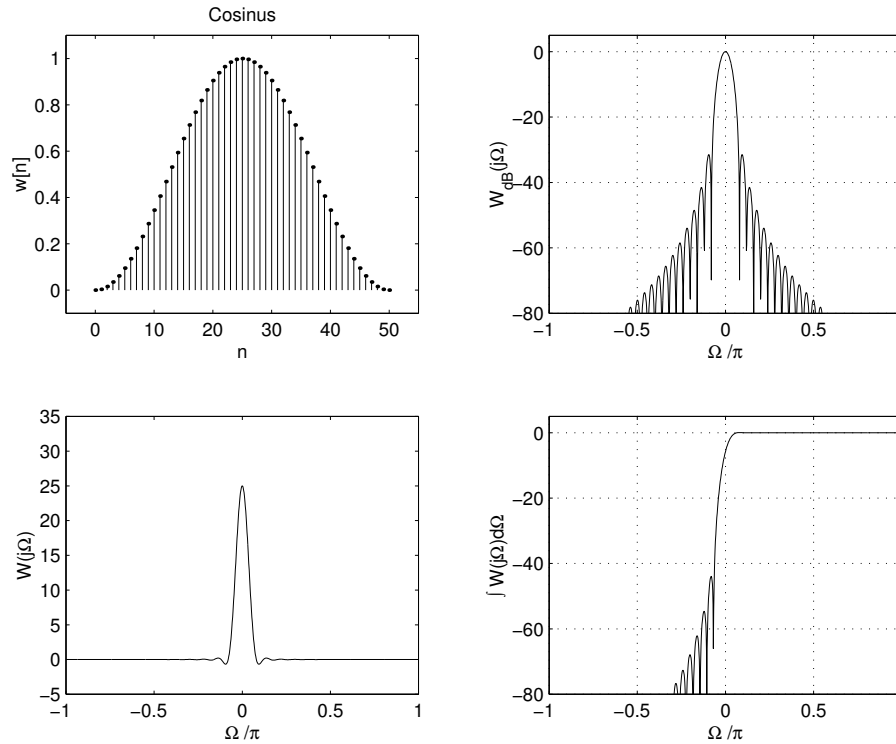


FIG. 13: Fenêtre en cosinus (Hann)

Fenêtre de Hamming

$$w_h[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi \frac{n}{N}) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (30)$$

Fenêtre de Blackman

$$w_b[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi \frac{n}{N}) + 0.08 \cos(4\pi \frac{n}{N}) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (31)$$

6.2 Fenêtre de Kaiser-Bessel

Les fenêtres présentées ci-dessus ont des formes et des atténuations fixes apportant chacune sa largeur du lobe principal et son atténuation des lobes latéraux. La contribution

de Kaiser fut de proposer une fenêtre s'adaptant à l'atténuation désirée. Cette fenêtre est définie par une fonction de Bessel :

$$w_k[n] = \begin{cases} \frac{I_0(\beta\sqrt{1-(1-n/N_s)^2})}{I_0(\beta)} & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (32)$$

avec :

- I_0 = fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro
- β = paramètre de forme de la fenêtre
- $N_s = N/2$ = point de symétrie de la fenêtre

6.2.1 Calcul de la fonction de Bessel

L'usage fréquent des fenêtres de Hann ou de Hamming est dû à ce que ces fonctions sont familières et faciles à calculer. Cependant, bien que la fonction de Bessel soit en général peu connue, il est aisé de la calculer en utilisant son développement en série :

$$I_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right]^2 \quad (33)$$

Cette série converge rapidement et la procédure de calcul proposée par Kaiser est très simple à mettre en oeuvre :

```
function Bessel0 (x :real) :real ;
  const eps = 1.0e-6 ;
  var d, ds, s : real ;
begin
  d := 0.0 ; ds := 1.0 ; s := 1 ;
  repeat
    d := d + 2.0 ;
    ds := ds * (x / d) * (x / d) ;
    s := s + ds ;
  until abs (ds/(s+eps)) < eps ;
  Bessel0 := s ;
end ;
```

6.2.2 Calcul des paramètres des fenêtres de Kaiser

La figure 18 montre les caractéristiques fréquentielles de quelques fenêtres de Kaiser. On en tire les conclusions suivantes :

- en augmentant la longueur du filtre N , on diminue la largeur du lobe principal
- en augmentant le paramètre de forme β , on diminue l'amplitude des lobes latéraux.

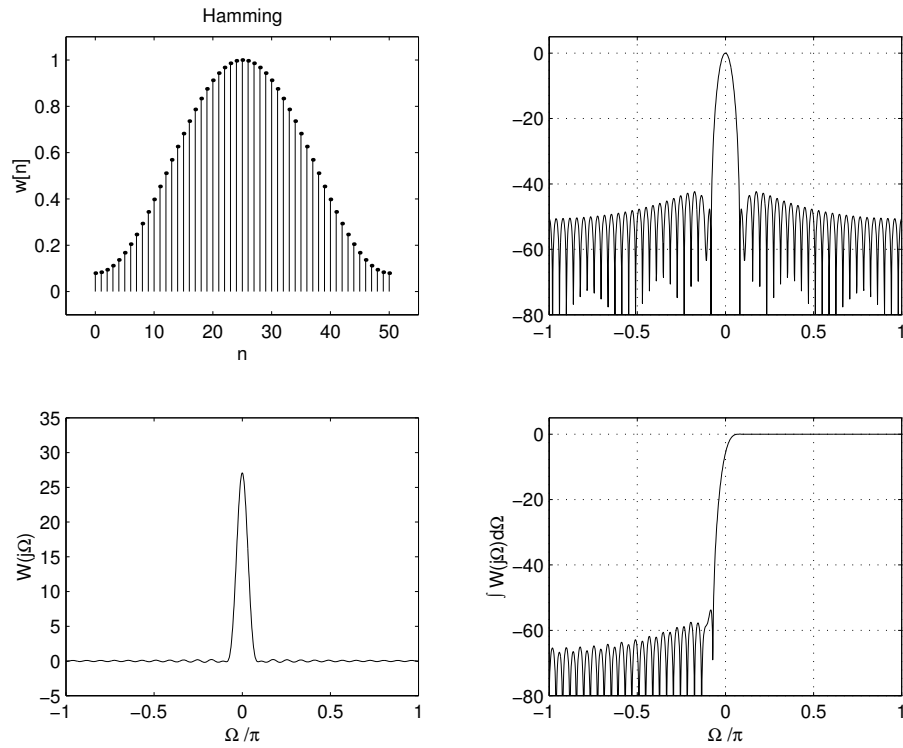


FIG. 14: Fenêtre de Hamming

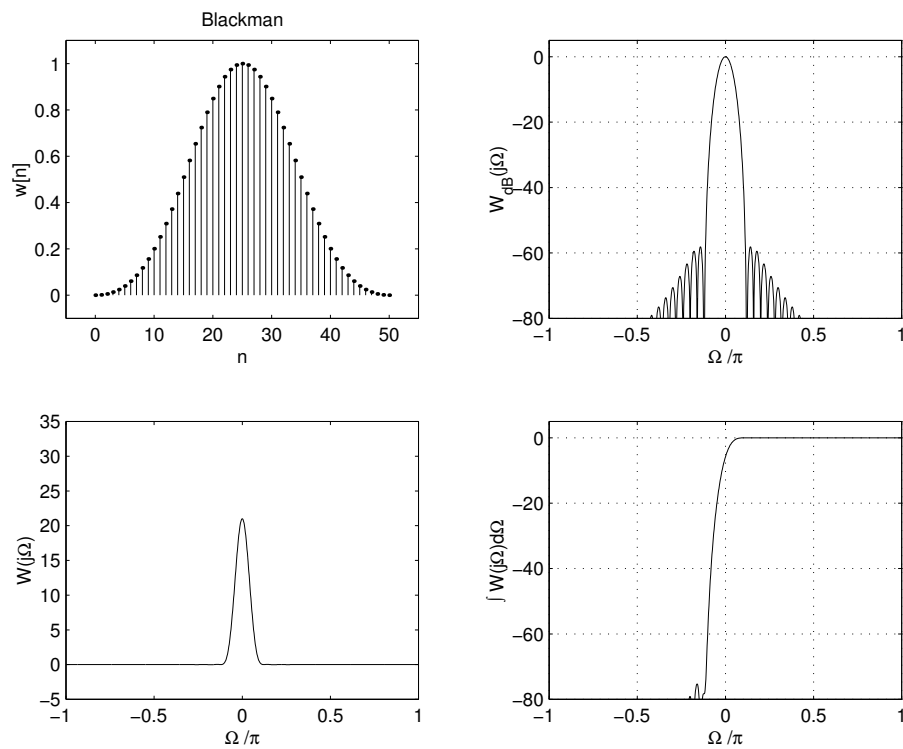
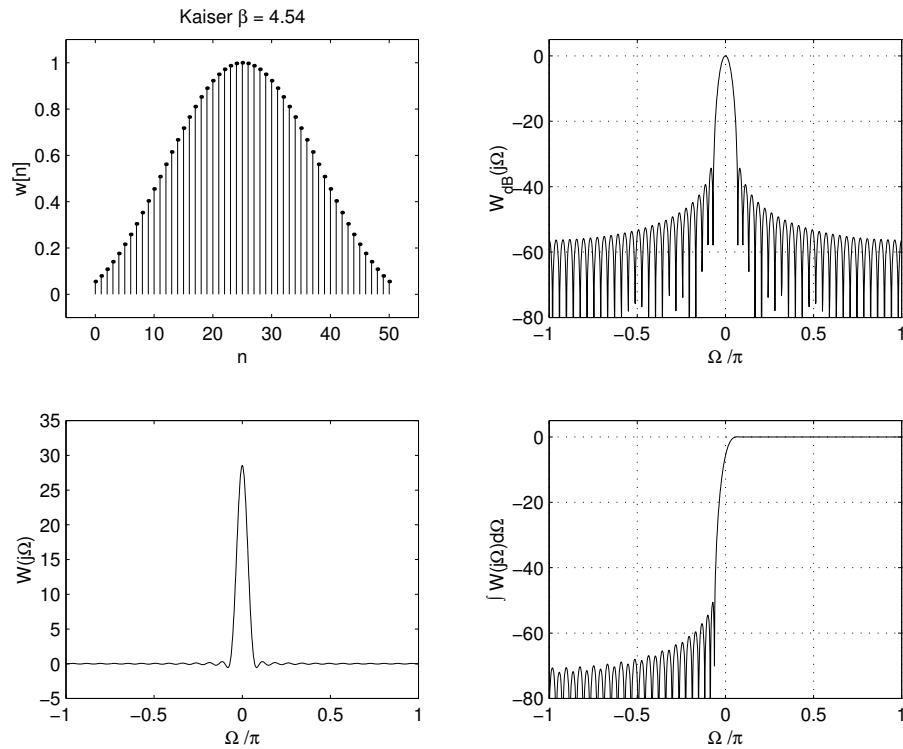
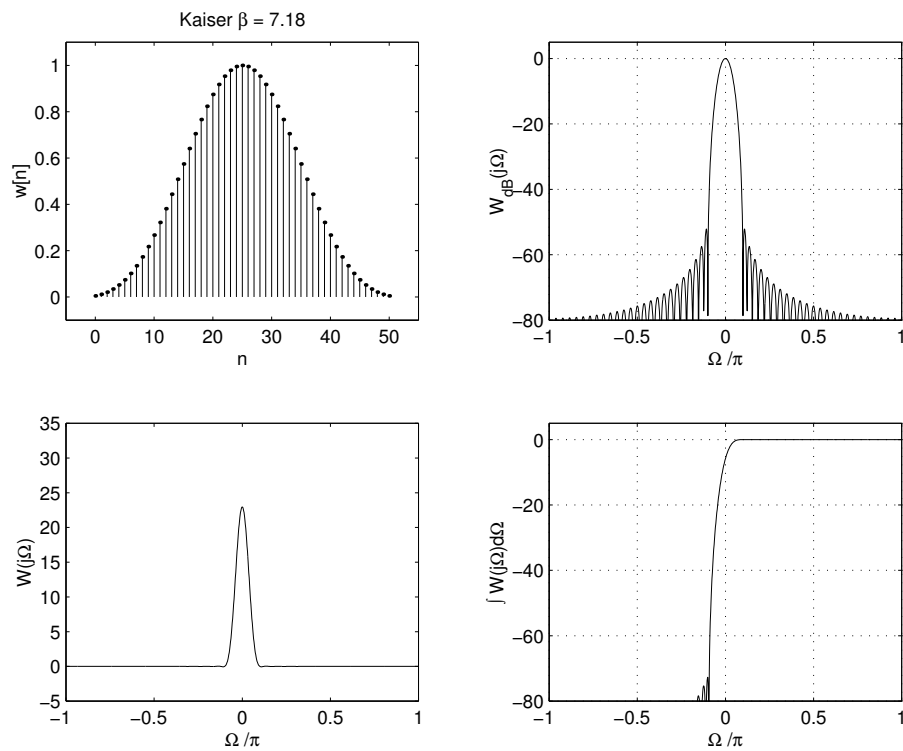


FIG. 15: Fenêtre de Blackman

FIG. 16: Fenêtre de Kaiser avec $\beta = 4.54$ FIG. 17: Fenêtre de Kaiser avec $\beta = 7.18$

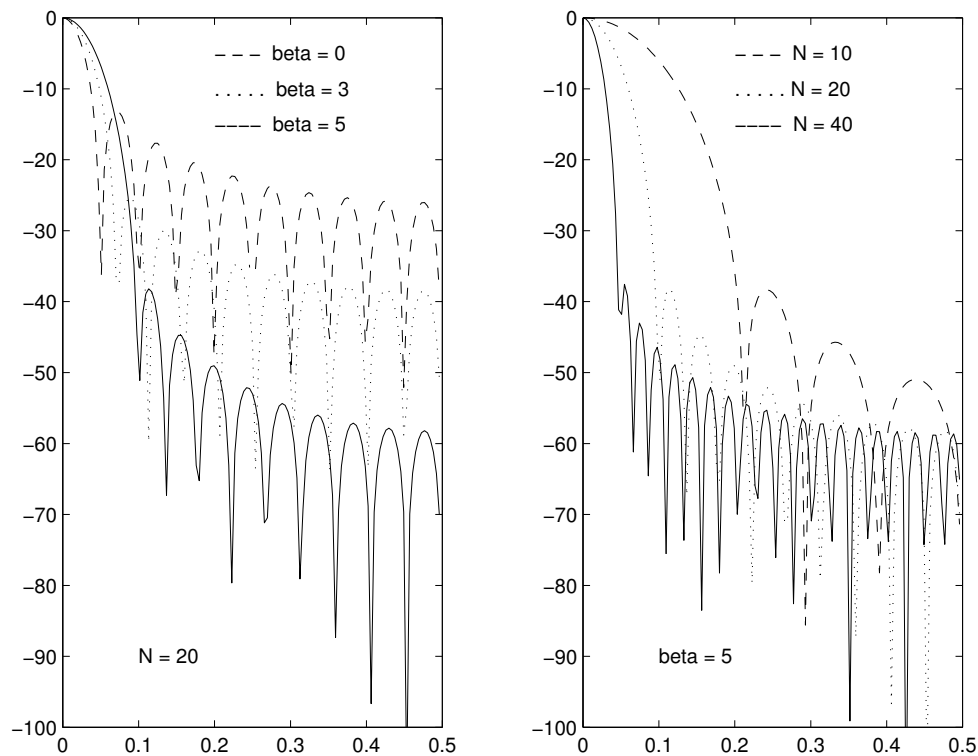


FIG. 18: Caractéristiques fréquentielles de quelques fenêtres de Kaiser

Après une simulation numérique extensive, Kaiser a obtenu une paire de formules qui permettent de trouver β et N à partir des spécifications demandées. Ces spécifications sont l'atténuation A_{dB} et la largeur de la bande de transition $\Delta\Omega$ exprimée en radians.

Le facteur de forme β dépend uniquement de l'atténuation A_{dB}

$$\beta = \begin{cases} 0.1102 (A_{dB} - 8.7) & \text{si } A_{dB} > 50 \\ 0.5842 (A_{dB} - 21)^{0.4} + 0.078862 (A_{dB} - 21) & \text{si } 21 \leq A_{dB} \leq 50 \\ 0 & \text{si } A_{dB} < 21 \end{cases} \quad (34)$$

La longueur du filtre est déterminée par l'atténuation A_{dB} et la bande de transition $\Delta\Omega$ souhaitée

$$N \geq \frac{A_{dB} - 8}{2.285 \Delta\Omega} \quad (35)$$

7 Utilisation des fenêtres

7.1 Résumé des propriétés

L'ensemble des propriétés étudiées ci-dessus sont réunies dans les tables 1 à 3. On y trouve :

- table 1 : la largeur et l'amplitude du premier lobe latéral des spectres des fenêtres usuelles et la décroissance des lobes suivants ;
- table 2 : l'ondulation maximum R_p de la bande passante, l'atténuation maximum A_{max} de la bande d'arrêt et la largeur $\Delta\Omega$ de la bande de transition des filtres réalisés à l'aide de ces fenêtres ;
- table 3 : les avantages et inconvénients des fenêtres dans la réalisation de filtres RIF.

Fenêtres	Largeur	$A_{1^{er} lobe}$ [dB]	Décroissance
Rectangle	$4\pi/N$	-13	20 dB/déc
Triangle	$8\pi/N$	-27	40 dB/déc
Hann (cosinus)	$8\pi/N$	-32	60 dB/déc
Hamming	$8\pi/N$	-43	20 dB/déc
Blackman	$12\pi/N$	-58	60 dB/déc
Kaiser $\beta = 4.54$	$7.2\pi/N$	-30	20 dB/déc
Kaiser $\beta = 5.66$	$8.4\pi/N$	-42	20 dB/déc

TAB. 1: Caractéristiques des lobes spectraux des fenêtres usuelles

Fenêtres	R_p [dB]	A_{max} [dB]	$\Delta\Omega$
Rectangle	0.74	21	$1.8\pi/N$
Triangle	0	25	$6.1\pi/N$
Cosinus	0.055	44	$6.2\pi/N$
Hamming	0.014	53	$6.6\pi/N$
Blackman	0.0017	74	$11\pi/N$
Kaiser $\beta = 4.54$	0.025	50	$5.8\pi/N$
Kaiser $\beta = 5.66$	0.009	60	$7.2\pi/N$

TAB. 2: Caractéristiques des filtres

7.2 Démarche pour calculer un filtre

La démarche à suivre pour obtenir les coefficients du filtre souhaité est la suivante :

1. connaissant le gabarit du filtre désiré, choisir le filtre idéal correspondant ;
2. calculer les pulsations caractéristiques Ω_k se situant au centre des bandes de transition ;
3. rechercher la réponse impulsionnelle $h_d[n]$ du filtre idéal ; si celle-ci n'est pas connue, on peut la calculer par transformation de Fourier inverse ;
4. choisir une fenêtre $w[n]$ satisfaisante du point de vue de l'atténuation (table 2) ;
5. connaissant la largeur de la bande de transition $\Delta\Omega$, calculer l'ordre du filtre N ;
6. calculer les coefficients du filtre en multipliant la réponse impulsionnelle par la fenêtre choisie

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$$

Fenêtres	+/-	Remarques
Triangle	+	simple à calculer ; pas de sinus ou cosinus
	+	bande spectrale étroite
	-	faible réjection (25 dB)
	0	décroissance spectrale moyenne (-40 dB/déc)
Cosinus (Hann)	+	simple à calculer
	+	bande spectrale étroite
	0	réjection raisonnable (44 dB)
	+	forte décroissance spectrale (-60 dB/déc)
Hamming	+	simple à calculer
	+	bande spectrale étroite
	+	bonne réjection (53 dB)
	-	faible décroissance spectrale (-20 dB/déc)
Blackman	+	simple à calculer
	0	bande spectrale moyenne
	++	très bonne réjection (74 dB)
	+	forte décroissance spectrale (-60 dB/déc)
Kaiser	-	moins simple à calculer
	0	bande spectrale moyenne
	++	excellente réjection (100 dB)
	-	faible décroissance spectrale (-20 dB/déc)
	++	meilleur compromis atténuation / bande de transition

TAB. 3: Qualités et défauts des fenêtres dans la réalisation de filtres RIF

8 Exemples de synthèse

8.1 Réalisation d'un filtre passe-bas

Considérons la réalisation d'un filtre passe-bas satisfaisant au gabarit suivant :

fréq. d'échant.	10 kHz	Atténuation
bande passante	0...1kHz	0 dB
bande d'arrêt	1.4... 5 kHz	50 dB

8.1.1 Préliminaires

La réponse du filtre sera construite à partir de celle d'un filtre passe-bas idéal tel que :

1. la fréquence de coupure se situe au centre de la bande de transition

$$f_c = \frac{f_p + f_a}{2} = 1.2 \text{ kHz}$$

donc :

$$\Omega_c = 2\pi \frac{f_c}{f_e} = 2\pi \frac{1.2 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.24 \pi$$

2. la largeur de la bande de transition requise est de 0.4 kHz ; on a donc :

$$\Delta\Omega = 2\pi \frac{\Delta f}{f_e} = 2\pi \frac{0.4 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.08 \pi$$

3. la réponse impulsionnelle désirée est celle d'un filtre passe-bas (éq. 19) :

$$h_d[n] = h_b[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_c)}{(n-N_s)\Omega_c} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. le tableau 2 montre que pour cet exemple, on peut utiliser la fenêtre de Hamming ou la fenêtre universelle de Kaiser. Considérons ces deux cas.

8.1.2 Fenêtrage de Hamming

La fenêtre de Hamming apporte une atténuation de 53 dB et une bande de transition de largeur

$$\Delta\Omega = \frac{6.6\pi}{N}$$

On en déduit immédiatement la longueur N du filtre :

$$N = \frac{6.6\pi}{\Delta\Omega} = \frac{6.6\pi}{0.08\pi} = 82.5 \simeq 84$$

que l'on a arrondi à la première valeur paire supérieure. Le point de symétrie se situe donc en $N_s = 42$. Portant ces valeurs dans la réponse impulsionnelle désirée (éq. 19), on obtient :

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{\Omega_c \sin((n - N_s)\Omega_c)}{\pi (n - N_s)\Omega_c} \\ &= \frac{\sin(0.24\pi(n - 42))}{\pi(n - 42)} \end{aligned}$$

En multipliant cette réponse par la fenêtre de Hamming $w_h[n]$, on obtient la réponse impulsionnelle du filtre RIF recherché

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin(0.24\pi(n-42))}{\pi(n-42)} \cdot (0.54 - 0.46 \cos(2\pi \frac{n}{84})) & \text{si } 0 \leq n \leq 84 \\ 0.24 & \text{si } n = 42 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les réponses impulsionnelle et fréquentielle de ce filtre RIF sont présentées dans la figure 19.

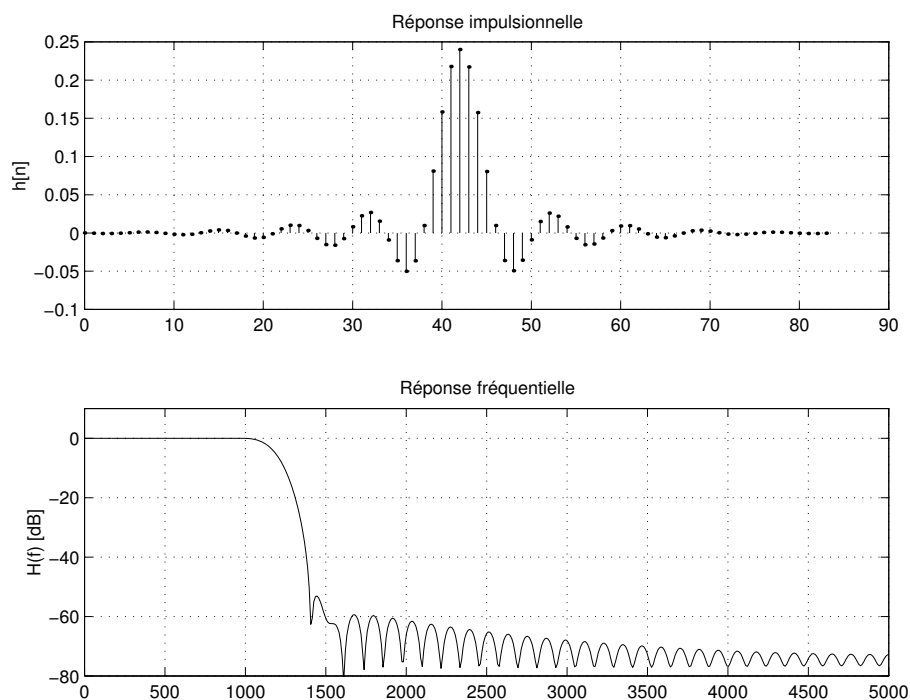


FIG. 19: Réponses impulsionnelle et fréquentielle (Hamming)

8.1.3 Fenêtrage de Kaiser

Dans ce cas, l'atténuation A_{dB} détermine le facteur de forme β . Comme $A_{db} = 50$, il vient (éq. 34) :

$$\beta = 0.1102 (A_{dB} - 8.7) = 0.1102 (50 - 8.7) = 4.55$$

L'ordre du filtre est fixé par la bande de transition $\Delta\Omega$ et l'atténuation A_{db} (éq. 35) :

$$N \geq \frac{A_{dB} - 8}{2.285 \Delta\Omega} = \frac{50 - 8}{2.285 \cdot 0.08\pi} = 73.1 \simeq 74$$

La valeur trouvée (73.1) est augmentée à 74 de manière à obtenir une longueur paire ; le point de symétrie se situe donc en $N_s = 37$. Portant ces valeurs dans la réponse impulsionnelle désirée (éq. 19), on obtient :

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{\Omega_c \sin((n - N_s)\Omega_c)}{\pi (n - N_s)\Omega_c} \\ &= \frac{\sin(0.24\pi(n - 37))}{\pi(n - 37)} \end{aligned}$$

En multipliant cette réponse par la fenêtre de Kaiser $w_k[n]$, on obtient la réponse impulsionnelle du filtre RIF recherché

$$h[n] = h_d[n] \cdot w_k[n]$$

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin(0.24\pi(n-37))}{\pi(n-37)} \cdot \frac{I_0(4.55\sqrt{1-(1-n/37)^2})}{I_0(4.55)} & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les réponses impulsionnelle et fréquentielle de ce filtre RIF sont présentées dans la figure 20. A titre comparatif, on y ajoutée en pointillé la réponse d'un filtre de Butterworth d'ordre 12 (filtre RII). Il est également intéressant d'observer la manière dont un signal carré est filtré par un filtre RIF ou RII (figure 21).

8.2 Calcul d'un filtre passe-bande

Considérons la réalisation d'un filtre passe-bande satisfaisant au gabarit suivant :

fréq. d'échant.	10 kHz	Atténuation
1 ^{ere} bande d'arrêt	0... 1.8 kHz	30 dB
bande passante	1.9...2.1 kHz	0 dB
2 ^{eme} bande d'arrêt	2.4... 5 kHz	40 dB

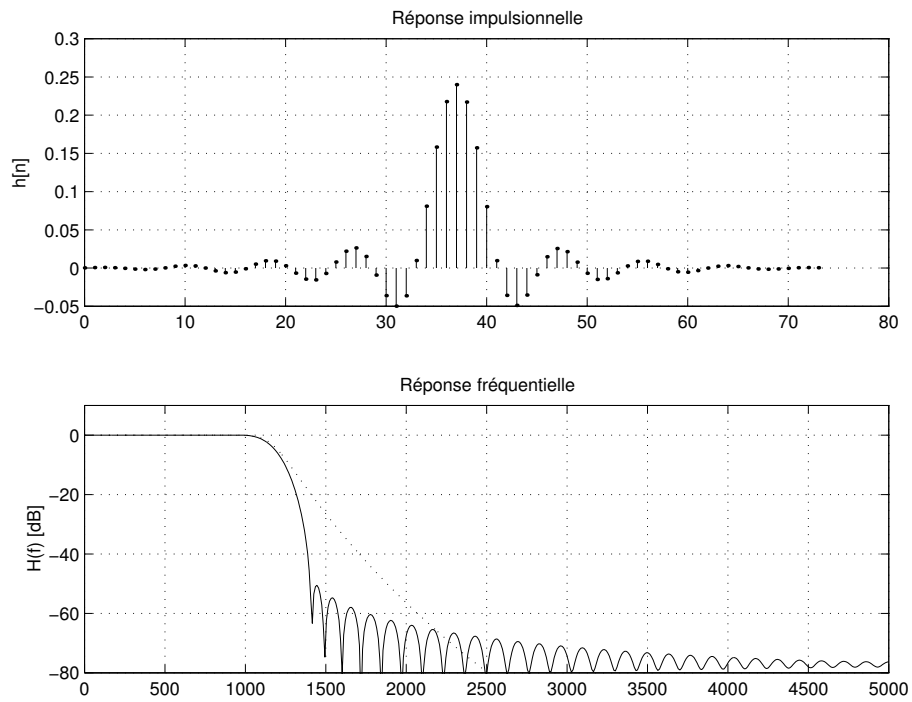


FIG. 20: Réponses impulsionnelle et fréquentielle (Kaiser)

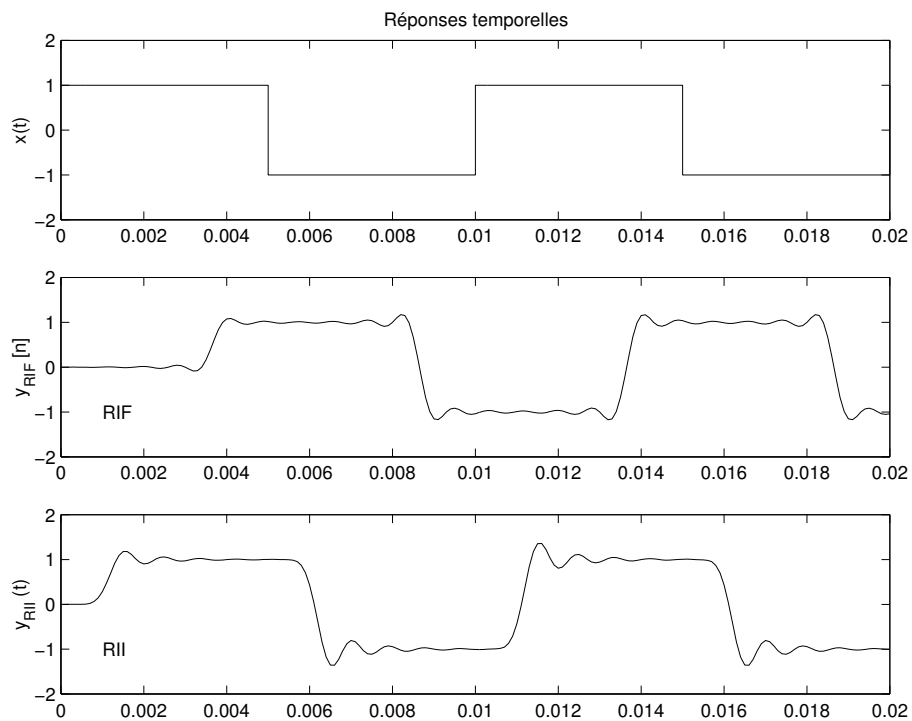


FIG. 21: Comparaison des réponses temporelles

Dans le cas, où 2 atténuations différentes sont proposées pour les bandes d'arrêt, les calculs doivent se faire avec la plus forte atténuation (ici 40 dB). De même, la bande de transition choisie pour les calculs sera la plus faible des deux.

Dans le tableau 2, nous voyons que la fenêtre en cosinus offre l'atténuation souhaitée. Comme la plus petite bande de transition a une largeur de 0.1 kHz, on en déduit que les fréquences définissant les bandes de transition sont les suivantes :

f_{a1}	f_{p1}	f_{p2}	f_{a2}
1.8 kHz	1.9 kHz	2.1 kHz	2.2 kHz

Ce qui donne pour les 2 bandes de transition :

$$\Delta\Omega = 2\pi \frac{\Delta f}{f_e} = 2\pi \frac{0.1 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.02\pi$$

L'ordre du filtre est fixé par la largeur de la bande de transition $\Delta\Omega$:

$$N \geq \frac{6.2\pi}{\Delta\Omega} = \frac{6.2}{0.02} = 310$$

Comme cette valeur est entière, il n'est pas nécessaire de l'augmenter ; le point de symétrie se situe donc en $N_s = 155$.

La réponse du filtre est construite à partir de celle d'un filtre passe-bande idéal dont les fréquences caractéristiques se situent au centre des 2 transitions

$$f_{c1} = \frac{f_{a1} + f_{p1}}{2} = 1.85 \text{ kHz}$$

$$f_{c2} = \frac{f_{p2} + f_{a2}}{2} = 2.15 \text{ kHz}$$

donc :

$$\Omega_{c1} = 2\pi \frac{f_{c1}}{f_e} = 2\pi \frac{1.85 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.37\pi$$

$$\Omega_{c2} = 2\pi \frac{f_{c2}}{f_e} = 2\pi \frac{2.15 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.43\pi$$

La réponse impulsionnelle désirée est celle d'un filtre passe-bande (éq. 24) :

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c2})}{(n-N_s)\Omega_{c2}} - \frac{\Omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c1})}{(n-N_s)\Omega_{c1}} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_{c2} - \Omega_{c1}}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou, plus simplement :

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{\sin((n - N_s)\Omega_{c2})}{\pi(n - N_s)} - \frac{\sin((n - N_s)\Omega_{c1})}{\pi(n - N_s)} \\ &= \frac{\sin(0.43\pi(n - 155))}{\pi(n - 155)} - \frac{\sin(0.37\pi(n - 155))}{\pi(n - 155)} \end{aligned}$$

En multipliant cette réponse par la fenêtre en cosinus $w_c[n]$, on obtient la réponse impulsionnelle du filtre RIF recherché

$$h[n] = h_d[n] \cdot w_c[n]$$

$$h[n] = \left(\frac{\sin(0.43\pi(n - 155))}{\pi(n - 155)} - \frac{\sin(0.37\pi(n - 155))}{\pi(n - 155)} \right) \cdot \frac{1 - \cos(2\pi n)}{2}$$

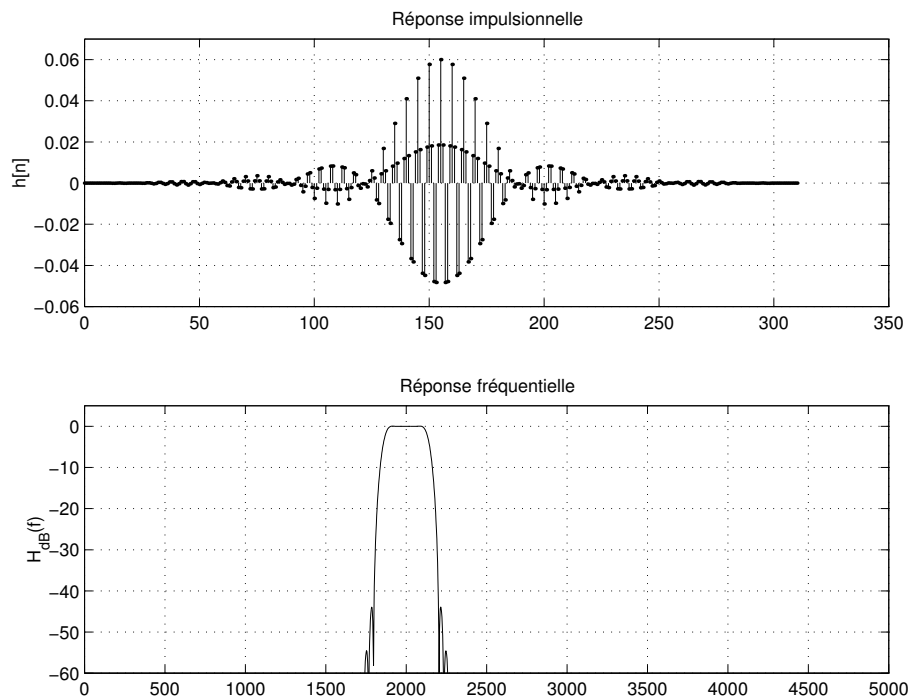


FIG. 22: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-bande (cosinus)

Les réponses impulsionnelle et fréquentielle sont présentées dans la figure 22. Un tracé plus détaillé de la réponse fréquentielle permet de relever une ondulation maximum de 0.05 dB aux 2 extrémités de la bande passante et des pulsations de coupure (-3 dB) situées en 1864 Hz et 2136 Hz.

Références

- [1] V.K. Ingle, J.G. Proakis : *Digital Signal Processing Using MatLab*, PWS Publishing Company, 1997

- [2] B. Porat : *A Course in Digital Signal Processing*, John Wiley, 1997
 [3] J.F. Harris : *On the Use of Windows for Harmonic Analysis*, Proc. IEEE, vol 66, No.1, Jan.1978
 [4] J.F.Kaiser, F.F. Kuo : *System Analysis by Digital Computer*, John Wiley, 1966

9 Exercices

Pour les exercices qui suivent, si f_e n'est pas précisé, on prendra $f_e = 10kHz$.

RIF 1

Réalisez un filtre passe-bas non récursif (ou à réponse impulsionnelle finie) satisfaisant au gabarit suivant :

$$f_p = 2kHz \quad A_p = 0dB$$

$$f_a = 3kHz \quad A_a = 40dB$$

RIF 2

Réalisez un filtre passe-bande non récursif satisfaisant au gabarit suivant :

$$f_{a1} = 0.6kHz \quad A_{a1} = 30dB$$

$$f_{p1} = 1.0kHz \quad A_p = 0dB$$

$$f_{p2} = 2.0kHz \quad A_p = 0dB$$

$$f_{a2} = 2.6kHz \quad A_a = 50dB$$

RIF 3

On veut réaliser un filtre passe-bas à réponse impulsionnelle finie tel que sa bande passante soit de $1kHz$ alors que $f_e = 20kHz$.

1. Analyse temporelle

- calculez $h_b[n]$;
- tronquez h_b à $N = 128$ et rendez-la causale ;
- que vaut $h_b[n]$ à ses extrémités ?
- est-ce raisonnable de l'accepter tel quel ? sinon que pouvez-vous faire ?

2. Analyse fréquentielle

Afin d'augmenter la résolution spectrale, on ajoute des 0 à la réponse impulsionnelle ; comme l'usage de la FFT nécessite que la longueur du signal analysé soit une puissance de 2, essayez 512 et/ou 1024.

- a) calculez $H(jf)$ (fft) ;
 - b) tracez le module et la phase de $H(jf)$;
 - c) est-ce que cela correspond à votre attente ?
 - d) que valent les extrema de la bande passante et celle d'arrêt (zoom) ?
 - e) mesurez la fréquence de coupure et la largeur de la bande de transition.
3. Amélioration de la réponse fréquentielle
- a) reprenez $h_b[n]$ et multipliez-la par une fenêtre en cosinus ou de Hamming ;
 - b) répétez les points 2.a), ..., 2.d).
 - c) concluez.

RIF 4

1. Générez un signal $x[n]$ de 64 échantillons à partir d'un cosinus discret tel que $A = 10$, $\Omega_0 = \pi/16$, $\alpha = \pi/3$.
2. Le système dans lequel passe ce signal $x[n]$ est décrit par les 2 équations suivantes :

$$w[n] = (x[n])^2$$

$$y[n] = w[n] - w[n-1]$$

3. Dessinez le schéma fonctionnel de ce système et décrivez ce que réalise chaque fonction ; en quoi ces 2 opérateurs sont-ils à réponse impulsionnelle finie ?
4. Tracez sur une même figure les 3 signaux (subplot) ; observez-les.
5. Esquissez à la main le spectre de chacun des 3 signaux ;
 - a) remarquez que le premier opérateur est non linéaire et qu'il génère des fréquences non présentes dans $x[n]$; lesquelles ?
 - b) d'un point de vue temporel et fréquentiel, quel est l'effet du deuxième opérateur ?
6. Observez le signal $w[n]$; quelles sont les fréquences présentes ?
7. Transformez de Fourier les 3 signaux ; tracez sur une nouvelle figure les 3 spectres d'amplitudes.
8. Observez ces spectres et justifiez votre analyse précédente.

Réf. : McClellan, Schaffer, Yoder : *DSP FIRST*, Prentice Hall, 1998, p. 461

RIF 5

1. Générez un signal $x[n]$ de 128 échantillons tel que

$$x[n] = 10 \cos(2\pi n/T_0 + \pi/6) + 2 \cos(6\pi n/T_0 + \pi/2)$$

avec $T_0 = 32$; que valent les pulsations normalisées de $x[n]$?

2. Ce signal est appliqué à un filtre RIF d'ordre 2 décrit par

$$y[n] = x[n] - 2 \cos(3\pi/16)x[n-1] + x[n-2]$$

Dessinez son schéma fonctionnel.

3. Quel est le gain DC de ce filtre ?
4. Quelle est sa réponse impulsionnelle $h[n]$?
5. Avec Matlab, calculez et tracez les signaux $x[n]$, $h[n]$ et $y[n]$.
6. Observez les résultats ; quel est l'effet du filtre ?
7. Justifiez l'allure de $y[n]$ en calculant et traçant le module de la réponse fréquentielle $H(j\Omega) = \text{TF}(h[n])$ avec $N_{FFT} = 128$ ainsi que les spectres d'amplitude de $x[n]$ et $y[n]$.

RIF 6

Poursuivant l'exercice précédant et partant de son équation

$$y[n] = x[n] - 2 \cos(3\pi/16)x[n-1] + x[n-2]$$

1. Calculez sa fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

puis

- a) calculez ses pôles et zéros ;
 - b) tracez-les dans le plan complexe ;
 - c) justifiez l'effet réjecteur de ce filtre.
2. Pour quelle fréquence normalisée a-t-on $H(jf/f_e) = 0$?
 3. Tenant compte de ce qui vient d'être vu, quelle est l'équation d'un filtre réjecteur capable de supprimer
 - a) le 50 Hz d'un signal échantillonné à 1kHz ;
 - b) le 50 Hz et 150 Hz d'un signal échantillonné à 1kHz.
 4. Générez ces signaux et vérifiez vos algorithmes.